TECHNION – ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

בס"ד, יום חמישי, ד' תשרי, תשפ"ג

29.9.22

מבחן בחדו"א 1מ – 104018 – אביב תשפ"ב – 2022 – מועד ב'

- משך הבחינה שלוש שעות.
- יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד.
- אסור להשתמש בחומר עזר
- במבחן שלושה חלקים. חלק ראשון שמכיל שאלות פתוחות, חלק שני שאלות נכון/לא נכון וחלק שלישי של שאלות רב בררתיות ("אמריקאיות").
- בחלק של השאלות הפתוחות יש לנמק היטב כל צעד
- את כל התשובות יש לכתוב בגוף השאלון.

שאלה 1 (50 נק')

(שימו לב! שאלה זו, בנוסף להיותה חלק אינטגרלי מהבחינה, משמשת כתחליף לבוחן למי שזכאי לכך)

א. (10 נק') הוכיחו לפי הגדרת הנגזרת כי $(lnx)' = \frac{1}{x}$

פתרון. ראו ברשימות הקורס

ב.(10 נק') הוכיחו כי עבור $0 < a \leq 0.75$

$$arctan(ax) \leq ln\,(1+x)$$

לכל $x > 0$.

פתרון.

נסמן $f(x) = ln(1+x) - arctan(ax)$ אזי $f(0) = 0$

נמצא תנאי על $a > 0$ כך ש-

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{a}{1+a^2x^2} \geq 0$$

לכל $x > 0$.

זה יקרה אמ"מ

$$1 + a^2x^2 - a(1+x) \geq 0$$

אמ"מ

$$a^2x^2 - ax + 1 - a \geq 0$$

נבחן מתי גרף הפונקציה משמאל תמיד מעל ציר האיקס. זה יקרה (המקדם של x^2 חיובי תמיד)

$$a^2 - 4a^2(1-a) \leq 0$$

וזה יקרה אמ"מ $a \leq 0.75$ ובסה"כ $0 < a \leq 0.75$

ג. (10 נק') הוכיחו כי

$$0 \leq \int_0^1 \left(\ln(1+x) - arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) < 0.5$$

פתרון.

לפי סעיף קודם האינטגרנד אי-שלילי ולכן לפי משפט חמש התכונות

$$\int_0^1 \left(\ln(1+x) - arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geq 1 \cdot 0 = 0$$

מצד שני,

נראה כי $\ln\,(1+x) \leq x$ לכל $x \geq 0$,

נסמן $f(x) = ln(1+x) - x$ אזי $f(0) = 0$ ומתקיים $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$ לכל $x \geq 0$

ומכאן כי $(1+x) \leq x$ לכל $x \geq 0$.

כעת,

$$\int_0^1 \left(\ln(1+x) - arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) < \int_0^1 \ln(1+x) \leq \int_0^1 x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

שאלה 2 (20 נק')

א. נניח כי $f(x)$ גזירה פעמיים ואיננה מונוטונית בקטע $[a,b]$ הראו כי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש- $f'(c) = 0$

פתרון.

נניח כי $f(x)$ גזירה פעמיים ואיננה מונוטונית בקטע $[a,b]$. אזי $f'(x)$ רציפה. כיוון ש-$f(x)$ איננה מונוטונית ע"פ מסקנות לגרנז' קיימות נקודות $x_0, x_1 \in [a,b]$ כך ש- $f'(x_0) > 0$ ו- $f'(x_1) < 0$ כיוון ש-$f'(x)$ רציפה נקבל ע"פ משפט ערך הביניים כי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש- $f'(c) = 0$

ב. קודם מסעיף הפונקציה של טיילור פולינום פיתוח באמצעות הוכיחו. $|f''(x)| \leq 2$ כי נניח סביב הנקודה c כי

$$|f(x) - f(c)| \leq (x-c)^2$$

פתרון. נפתח את הפונקציה לפולינום טיילור מסדר ראשון סביב הנקודה c עם שארית ונקבל

$$f(x) = f(c) + f'(c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2} = f(c) + 0 + \frac{f''(a)(x-c)^2}{2}$$
$$= f(c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2}$$

כאשר a נקודה בין c ל-x.

ולכן

$$|f(x) - f(c)| = \left|\frac{f''(a)(x-c)^2}{2}\right| = \left|\frac{f''(a)}{2}\right| |(x-c)^2| \leq (x-c)^2$$

חלק שני רב ברירתי – "אמריקאי" (35 נקודות)

שאלה 1 (7 נק')

הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}arctan(n)+\frac{1}{2}\right)^n$ שווה ל-

א. $e^{-\frac{1}{\pi}}$ ב. $e^{\frac{2}{\pi}}$ ג. e ד. $e^{\frac{1}{\pi}}$ ה. $\frac{1}{e}$

שאלה 2 (7 נק')

נתון הטור $I=\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ והאינטגרל $II=\int_0^1 \frac{1}{2-2cos(\sqrt{x})}$ אזי

א. שניהם מתכנסים

ב. שניהם מתבדרים

ג. הטור I מתכנס והאינטגרל II מתבדר

ד. האינטגרל II מתכנס והטור I מתבדר

שאלה 3 (7 נק')

תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\frac{n\pi}{2}-\mathrm{n}(\arctan(n))\right)x^n$

א. $[-1,1]$

ב. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

ג. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

ד. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

ה. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

שאלה 4 (7 נק')

נתונה הפונקציה $f(x) = xsinx + lnx + 1$ אזי

א. לפונקציה יש אינסוף שורשים

ב. לפונקציה יש שלושה שורשים

ג. לפונקציה יש שני שורשים

ד. לפונקציה יש שורש אחד

ה. לפונקציה אין שורשים

שאלה 5 (7 נק')

סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

א. $\ln(1+x)$

ב. $\arctan(x)$

ג. $\arctan(x) - x$

ד. $\frac{1}{1+x^2} - 1$

ה. $\frac{1}{1+x^2}$

סמנו נכון/לא נכון בסעיפים הבאים (3 נק' לכל סעיף)

1. $tanx \geq \frac{3}{\pi}x$ בקטע $[0,1]$

א. נכון **ב. לא נכון**

2. אם פונקציה f גזירה בקטע $[a,b]$ ומקיימת $f'(a)f(b) < 0$ אזי קיימת נקודה c כך ש-

$$f(c) = 0$$

א. נכון **ב. לא נכון**

3. אם $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ קיים ו- $\lim_{n\to\infty}(a_{2n+1} - a_{2n}) = 0$ אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

א. נכון **ב. לא נכון**

4. קיימות פונקציות f, g שונות האחת מהשניה, רציפות בקטע $[a, b]$ ושוות בכל הנקודות הרציונליות על הקטע.

א. נכון **ב. לא נכון**

5. אם f גזירה ב-$(0, \infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$ אזי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

א. נכון **ב. לא נכון**

דף ריק במידת הצורך

בהצלחה!